ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2013/2014 – Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

* * * * * * *

TEMA: Numeri di Fibonacci: alcune loro proprietà rilevanti.

* * * * * * *

ESERCIZIO 1. Si scriva una generica terna pitagorica primitiva positiva (x, y, z) nella forma:

$$x = 2st\,,\ \ y = s^2 - t^2\,,\ \ z = s^2 + t^2\,,\quad \text{con } \mathrm{MCD}(s,t) = 1\,,\ \ s > t > 0\,,\ \ s \not\equiv t \pmod 2\,.$$

(1) Si determinino condizioni su s e t affinché possa eventualmente accadere che $y + 1 = x$.
(2) Si determinino condizioni su s e t affinché possa eventualmente accadere che $z = x + 1$.
(3) Si determinino condizioni su s e t affinché possa eventualmente accadere che $z = y + 1$.

ESERCIZIO 2. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$, si considerino le seguenti due fattorizzazioni in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$:

$$(3 + 2\boldsymbol{i})(3 - 2\boldsymbol{i}) = 13 = (2 + 3\boldsymbol{i})(2 - 3\boldsymbol{i})\,.$$

Stabilire se e quali tra gli elementi 13, $3+2\boldsymbol{i}$, $3-2\boldsymbol{i}$, $2+3\boldsymbol{i}$, e $2-3\boldsymbol{i}$ sono elementi irriducibili o primi in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ e se da tali fattorizzazioni del numero 13 si possa dedurre che $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ non è un dominio a fattorizzazione unica.

ESERCIZIO 3. Si considerino gli anelli $A := \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ (prodotto diretto, con le operazioni di somma e prodotto definite componente per componente) e $B := \mathbb{F}_2[\boldsymbol{i}] = \{x + y\boldsymbol{i} \mid x, y \in \mathbb{F}_2\}$ (con la operazione di somma definita da $(x + y\boldsymbol{i}) + (x' + y'\boldsymbol{i}) := (x + x') + (y + y')\boldsymbol{i}$ e prodotto definito da $(x + y\boldsymbol{i})(x' + y'\boldsymbol{i}) := (xx' - yy') + (xy' + x'y)\boldsymbol{i}$).

(1) Stabilire se A o/e B sono anelli booleani.
(2) Stabilire se l'applicazione $\varphi : A \to B$ definita da $(x, y) \mapsto x + y\boldsymbol{i}$ è un isomorfismo di anelli.

ESERCIZIO 4. Si munisca $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ della sua naturale struttura di algebra di Boole e si ponga

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \text{ è finito oppure } \mathbb{N} \setminus A \text{ è finito}\}$$

(1) Si verifichi che $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è una sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
(2) Si stabilisca se $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è completa e se è atomica.
(3) Sia adesso $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Bool}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{F}_2)$ lo spazio topologico duale di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, munito della topologia di Stone (cioè, della topologia indotta dalla topologia prodotto definita su $\mathbb{F}_2^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$). Per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ponga $A_i := \{2k \mid 0 \leq 2k \leq 2i\}$ $(\in \boldsymbol{\mathcal{A}})$, e sia

$$U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Bool}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{F}_2) \mid f(A_i) = 1\}.$$

   (a) Si mostri che l'insieme U è aperto in $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.
   (b) Si stabilisca se $\overline{U}$ (cioè, la chiusura di U) è aperto in $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.
   [Suggerimento: innanzitutto, si dimostri che, se $L \subseteq \mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ è un aperto-chiuso, allora esiste un insieme $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tale che $L = \{f \in \mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \mid f(A) = 1\}$. Se, poi, $\overline{U}$ fosse aperto in $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, allora...]